L'insegnamento della Matematica
e delle Scienze Integrate Vol. 6 - N. 3 - Giugno 1983

INDICE

I PICCOLI CALCOLATORI TASCABILI

NELLA SCUOLA

Spunti didattici

Carlo Felice MANARA

Raffaella TARDINI Manara

I° PARTE

****

1.- Non è più un mistero per nessuno il fatto che la esistenza dei nuovi mezzi di calcolo e di elaborazione della informazione ha posto gravi problemi alla scuola: da parte nostra noi pensiamo che questa debba prendere coscienza della esistenza di nuovi strumenti (che hanno una enorme influenza sulla nostra vita, e ne avranno una ancora maggiore nel futuro) e debba adattarsi vitalmente a questa situazione; e con la espressione **"adattarsi vitalmente"** vorremmo descrivere un atteggiamento che è ben lontano dalla chiusura totale, ma anche dagli entusiasmi facili e velleitari.

Da un punto di vista generale, vorremmo dire che il problema della utilizzazione dei calcolatori nella scuola e della preparazione degli studenti al loro utile impiego può essere affrontato a vari livelli. Riteniamo inutile ricordare che esistono molti progetti che riguardano la introduzione della informatica nelle scuole di ogni ordine e grado; tali progetti contemplano la utilizzazione dei nuovi mezzi di elaborazione della informazione: dei linguaggi, dei metodi di analisi e di programmazione, ecc., in modo che i giovani siano preparati alla utilizzazione ottimale delle nuove tecniche e dei nuovi mezzi nella gestione aziendale e in tutte le regioni dello scibile.

Naturalmente questa preparazione metodica e questa utilizzazione su scala abbastanza vasta richiede che i programmi d'insegnamento abbiano una nuova struttura e che la didattica, la distribuzione del tempo, la verifica dell'apprendimento siano sottoposti ad una revisione non indifferente; ed insieme richiede la preparazione di nuovi "**curriculi**" e forse anche la previsione del conferimento di nuovi titoli accademici (laurea in informatica) e di diplomi nuovi di vario grado.

Tutte le questioni che abbiamo ricordato ed altre numerose che abbiamo trascurato di nominare sono certo molto importanti, pongono dei problemi molto complessi e coinvolgono vasti interessi culturali ed anche economici. Ma, mentre si attendono i nuovi programmi e i risultati delle esperimentazioni e delle nuove strutture, rimangono vivi molti problemi, forse giudicati molto meno coinvolgenti ed importanti, ma che tuttavia creano certe difficoltà agli insegnanti delle scuole.

Tali problemi sono posti dalla esistenza dei piccoli calcolatori tascabili (che noi nel seguito chiameremo familiarmente "**macchinette**") che oggi sono venduti a prezzo bassissimo anche nei supermercati e che possono creare alcune difficoltà nell'insegnamento della matematica.

Ci pare ovvio osservare che sarebbero inutili le chiusure totali e le scomuniche, le quali - tra l'altro - non otterrebbero alcun risultato. Abbiamo quindi pensato di offrire agli insegnanti alcuni modesti spunti didattici, in modo che essi possano trarre profitto dal possesso di simili mezzi di calcolo da parte di molti scolari, per dare un'idea della matematica un po' diversa da quella che si riesce a dare abitualmente, e per insegnare ai giovani che non bisogna mai diventare schiavi di certi mezzi materiali, ma anzi occorre imparare a dominarli ed a servirsene.

D'altronde appare anche ovvio che non è possibile trascurare gli effetti negativi della utilizzazione dei mezzi di calcolo tascabili, effetti che si manifestano anzitutto nella pigrizia sempre maggiore da parte degli scolari a memorizzare i calcoli elementari (le famose "**tabelline**) e ad accettare le ordinarie leggi di calcolo aritmetico (messa in colonna, procedura per la divisione e così via...).

In un recente convegno, dedicato ai nuovi programmi di insegnamento della matematica nella scuola elementare, abbiamo sentito da varie parti richiamare la utilità dell'insegnamento mnemonico e dell'esercizio. Pensiamo che questi richiami agli aspetti positivi dell'insegnamento tradizionale siano giusti, perchè la matematica è anche un linguaggio, ed ogni linguaggio deve essere appreso con certi automatismi che nulla hanno di intelligente, beninteso, ma che sono necessarii perchè la espressione possa essere fluida e chiara.

Ricordiamo che **Leonardo PISANO**, detto il **FIBONACCI**, già aveva proclamato che l'esercizio è fondamentale per l'apprendimento e la utilizzazione ragionevole dei mezzi di calcolo nuovi (per quel tempo) che egli stava introducendo nella civiltà occidentale. Scrive Fibonacci:

> "... coloro i quali vogliono acquisire bene la pratica di questa scienza, debbono "continuamente applicarsi all'esercizio di essa con pratica diuturna. Infatti, "quando la scienza, con la pratica, è diventata un 'habitus', la memoria e "l'intelligenza si accordano in modo tale con le mani e le cifre, che arrivano "al risultato insieme, quasi con un medesimo impulso spontaneo e naturale..."

Noi pensiamo che queste idee, così bene espresse da Fibonacci, abbiano una grande validità anche oggi: tuttavia,a chiunque abbia pratica di scuola è anche ben noto che il convincere lo scolaro all'esercizio è una delle fatiche maggiori dell'insegnante; e che in particolare l'esercizio nella pratica di calcolo è uno dei capitoli più odiati da parte degli scolari, che non vedono facilmente (e spesso non vogliono vedere) la utilità della manovra spedita e sicura degli strumenti espressivi che noi ci sforziamo di consegnare loro.

E, del resto, la cosa non è nuova, se già **S. AGOSTINO** descrive nel Cap. XIII del I° Libro delle sue Confessioni il tedio provocato in lui dalle procedure didattiche del tempo, proprio a proposito dell'aritmetica, con le celebri parole: "... - uno più uno fa due, due più due fa quattro-era per me una odiosa canzone...".

Nasce di qui la constatazione della opportunità di studiare delle strategie didattiche atte a risvegliare l'interesse del discente, ed a convincerlo della utilità dello sforzo da compiere per superare la noia o la difficoltà dell'esercizio, in vista del possesso di strumenti espressivi sempre più potenti e validi.

E vorremmo osservare a questo proposito che neppure questo atteggiamento è così nuovo come qualcuno vorrebbe far credere: infatti **G. PEANO**, grande matematico, ma anche acuto studioso dei problemi di didattica della sua materia, chiudeva un suo interessantissimo libretto dedicato ai problemi didattici (Cfr.**(3, vi)**) con queste parole:

> " ... se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare.
> "Nè vale addossare la responsabilità slle scuole inferiori. Dobbiamo prendere
> "gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato
> "sotto altra nomenclatura.
> "Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore,
> "eccita odio contro sè e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento
> "sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui
> "un continuo tormento ... " .

2.- I pochi spunti didattici che presentiamo qui mirano appunto ad aiutare gli insegnanti a superare alcune tra le nuove difficoltà che si presentano, ed anzi a trarre profitto da quelle che a prima vista potrebbero essere considerate come occasioni di pigrizia e di asservimento degli scolari ai mezzi di calcolo elettronici.

Ovviamente ogni insegnante può aggiungere di suo ciò che la sua sensibilità e la sua esperienza gli suggeriscono; vogliamo anche osservare che gli esercizi che proponiamo non richiedono mezzi di calcolo più potenti di quelli che fanno soltanto le operazioni elementari, costano qualche migliaio di lire e - ripetiamo - sono addirittura in vendita presso certi supermercati. Il lettore esperto non avrà difficoltà ad identificare le dotazioni di funzioni che occorrono per la risoluzione dei singoli esercizi che proponiamo e la cultura matematica che essi presuppongono.

Volendo qui riassumere e dare un'idea generale del nostro pensiero, diremo che anzitutto l'insegnante può ribadire il significato delle regole di scrittura delle operazioni, e delle convenzioni di esecuzione: in generale si potrebbe dire che l'insegnante ha modo di far conoscere l'importanza della sintassi della lingua matematica, facendo constatare con facilità ed immediatezza che a differenti sequenze di operazioni e di ordini - pur eseguiti sugli stessi numeri - corrispondono diversi risultati: paradossalmente, il fatto che diverse case costruttrici abbiano adottato diverse convenzioni per i comandi delle operazioni può essere utile per ribadire l'utilità dell'apprendimento della sintassi del linguaggio; ed anche per ribadire il fatto che, in certa misura, tale sintassi, nella materialità delle sue operazioni, possa essere scelta in modi diversi, ma dà risultati attendibili soltanto se è conosciuta e rispettata nei minimi particolari.

Un secondo insieme di spunti che si possono trarre dalla utilizzazione di questi mezzi porta a dare un'idea della matematica più vicina alla concezione moderna di questa scienza. In questo ordine di idee infatti pensiamo che la matematica sia caratterizzata piuttosto dalle sue procedure che dagli oggetti che essa studia.

Le procedure matematiche, correttamente intese ed applicate, conducono alla massima utilizzazione delle informazioni, senza cadere negli errori, abbastanza comuni ed in certo modo tra loro opposti, che portano talvolta a sprecare delle preziose informazioni che si posseggono o si devono procurare a caro prezzo, talaltra ad illudersi che con soli procedimenti teorici si possono avere informazioni che i dati non forniscono.

Ciò che stiamo dicendo qui sarà illustrato nel seguito dalle brevi idee che ricorderemo a proposito del calcolo con numeri approssimati e delle precauzioni che si debbono prendere per evitare gli errori di cui abbiamo detto.

Proseguendo in questo ordine di idee, si giunge in modo spontaneo ad utilizzare una serie di spunti didattici che mirano a dare un'immagine corretta e moderna del concetto di soluzione di un problema matematico; invero, nella maggior parte dei casi, i discenti sono condotti a pensare che la soluzione di un problema consista puramente e semplicemente nella applicazione di certe formule. Nella visione della matematica che vorremmo trasmettere desidereremmo invece che la soluzione di un problema fosse vista come un procedimento razionale per ottenere con certezza delle informazioni che sono contenute nei dati, ma non esplicitamente. Pertanto, sempre secondo questa linea, la matematica conferma uno dei suoi aspetti che già G. PEANO metteva in evidenza dicendo che "la matematica è una logica perfezionata"; del resto, a ben guardare, molte operazioni che noi insegnamo non sono che delle procedure che consistono in tentativi razionalizzati e resi metodici. Tale è, per esempio, il procedimento per calcolare il quoziente ed il resto di una divisione; tale è anche il procedimento per calcolare la radice quadrata. Ed a questo proposito si potrebbe osservare che la abituale formula per esprimere le radici di un'equazione quadratica può essere considerata semplicemente come un procedimento che rimanda la ricerca per tentativi delle soluzioni ad un altro, già codificato, e memorizzato dai discenti, che conduce al calcolo della radice quadrata. Come vedremo, può avvenire che si possa sostituire con vantaggio l'uno dei procedimenti all'altro, quando si posseggano i mezzi di calcolo e si studino le procedure adatte; col che resta confermato che la formula risolutiva non ha nulla di logicamente prioritario nel procedimento di soluzione.

Vorremmo osservare infine che la utilizzazione dei mezzi di calcolo potrebbe anche permettere di dare un'idea più ampia del concetto di dimostrazione, distinguendolo dalla pura e semplice verifica, e conferendo alle conclusioni quella certezza che è diversa dallo stato psicologico ottenuto con la enunciazione di una semplice congettura, anche se ben fondata ed enunciata da persona autorevole.

Per spiegare più chiaramente ciò che intendiamo dire, vorremmo qui soffermarci un momento su di un esempio del tutto elementare, ma, a nostro parere, abbastanza istruttivo e significativo.

Si pensi, per esempio, alla proposizione seguente:

Adottata la convenzione decimale per la rappresentazione dei numeri interi, sia N un numero minore di 10 000, tale cioè che per la sua rappresentazione non siano necessarie più di quattro cifre; potremo parlare di cifre di posto dispari (contando il posto a partire da destra) e di cifre di posto pari (sempre con la stessa convenzione). Stabilito questo linguaggio, potremo dire che "condizione necessaria e sufficiente perchè un numero **N** sia multiplo di **11** è che la somma delle sue cifre di posto pari sia uguale a quella delle cifre di posto dispari o ne differisca per **11**".

Con l'ausilio dei mezzi di calcolo elementari l'insegnante può verificare la validità della proposizione per un gran numero di numeri appartenenti alla classe considerata, cioè rappresentati in forma decimale con non più di 4 cifre.

Tuttavia egli può fare osservare che queste verifiche, per quanto numerose, non costituiscono ancora il possesso sicuro della legge generale, che forma oggetto dell'enunciato preso in considerazione. Per raggiungere la certezza che questo è una legge generale della nostra convenzione di rappresentazione dei numeri naturali, occorrerebbe verificare la validità della legge per tutti i **909** numeri che sono inferiori a **10000** e che sono multipli di **11**. La cosa non è impossibile, e potrebbe farci raggiungere la certezza; è tuttavia da osservarsi che la verifica diretta potrebbe diventare molto scomoda e comunque richiederebbe del tempo. Ma questi sono soltanto degli inconvenienti pratici: la cosa più importante, da questo punto di vista, è costruire una procedura la quale permetta di garantire che le verifiche che si faranno effettivamente non dimenticano alcun numero multiplo di **11** ed inferiore a **10000**. Potremmo quindi concludere che non è possibile eliminare il ragionamento: se questo non viene fatto sulle proprietà dei numeri e della loro rappresentazione, deve essere fatto per garantire che tutti i numeri che vengono così passati in rassegna sono multipli di **11** e che nessun numero cosiffatto viene dimenticato dalla rassegna.

L'insegnante può poi dare la dimostrazione teorica generale, facendo rilevare che essa è fondata su due presupposti: da una parte le proprietà formali delle operazioni sui numeri (commutativa ed associativa della somma e del prodotto, distributiva del prodotto rispetto alla somma) e dall'altra sulle convenzioni di rappresentazione posizionale dei numeri.

Ovviamente si possono svolgere considerazioni analoghe a proposito dei criteri di divisibilità di un intero per altri numeri primi (per esempio, per 7) e si possono collegare queste considerazioni con quelle che riguardano le congruenze, e di cui diremo in seguito.

3.- Nel seguito, salvo avviso contrario che daremo esplicitamente di volta in volta, indicheremo con le lettere minuscole dell'alfabeto latino (a,b,c,...) oppure con lettere minuscole distinte tra loro da un indice in basso (a_0 ,a_1 ,a_2 ,...) delle cifre di cui ci serviamo abitualmente per rappresentare i numeri:

$$0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \quad ;$$

inoltre, seguendo G. PEANO e la sua scuola, spesso indicheremo con il simbolo X la base della nostra numerazione abituale, cioè il numero 10.

Ciò permette di rappresentare un intero N come un polinomio nella X nella forma

$$(1) \qquad N = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad ,$$

espressione che è utile spesso. Porremo poi anche

$$(2) \qquad Y = X^3 = 1000 \quad .$$

Per semplicità supporremo di disporre di una macchinetta che ha un visore (quello che alcuni chiamano "display") su cui possono comparire 8 cifre; casi diversi si possono trattare con pochissime ed ovvie modificazioni di ciò che diremo.

In questa ipotesi, per quanto riguarda la rappresentazione dei numeri che vengono introdotti nella macchinetta, oppure sono i risultati di operazioni che questa esegue, cioè per quanto riguarda le informazioni che la macchinetta stessa ci può fornire, si possono presentare i seguenti casi:

(i) il numero da rappresentare è intero e minore di X^8, cioè è rappresentato, mediante le ordinarie convenzioni, con 8 cifre al massimo. Allora la rappresentazione dà la informazione completa del valore esatto del numero considerato;

(ii) il numero da rappresentare è intero ma non minore di X^8 allora, nella maggior parte delle macchinette, viene utilizzata la cosidetta rappresentazione esponenziale; in altre parole, compare, a sinistra del visore un numero decimale, con 4 cifre al massimo dopo la virgola; nella parte a destra del visore compare un intero (con non più di 2 cifre) che indica l'esponente della potenza del 10 per cui deve essere moltiplicato il numero che compare a sinistra per ottenere una valutazione(ovviamente approssimata) del numero da considerare.

Per esempio: se cerchiamo con la nostra macchinetta il numero dato da

(3) $$A = 9875462 \times 3221458$$

si ottiene sul visore:

3.1813 nella parte sinistra e

13 nella parte destra.

Ciò significa che la macchinetta non ci dà una informazione completa sul numero A, ma dà soltanto il numero

(4) $$A' = 3.1813 \times X^{13}$$

come valore - ovviamente approssimato - di A.

(iii) Il numero da rappresentare è razionale; allora la macchinetta lo rappresenta in forma decimale. Ciò implica che se le cifre della rappresentazione sono in numero maggiore della capacità del visore, la macchinetta presenta ovviamente solo quelle che corrispondono ai posti di cui dispone. Tuttavia, se il numero è molto piccolo, allora la macchinetta lo rappresenta in forma esponenziale; cioè compare nei primi 5 posti a sinistra un numero decimale con una cifra intera, e nei due ultimi posti a destra compare un intero, a cui è premesso il segno **meno**, che rappresenta l'esponente della potenza (negativa) del 10 per cui va moltiplicato il numero di sinistra per avere un valore (ovviamente approssimato) del numero rappresentato.

Per esempio: se cerchiamo con la nostra macchinetta la rappresentazione del numero razionale B definito da

$$B = 1/9875462 \tag{5}$$

si ottiene sul visore:

1.0126 a sinistra e

\- 07 nella parte destra.

Ciò significa che la macchinetta ci dà per il numero B cercato il seguente valore (ovviamente approssimato):

$$B' = 1.0126 \times X^{-7} \tag{6}$$

<u>4.-</u> Le osservazioni che abbiamo fatto nel && precedente ci indicano facilmente la strada che porta a ricuperare le informazioni che la macchina non ci dà a proposito delle operazioni con numeri molto grandi che abbiamo indicato.

Invero quando si tratta, per esempio, del numero A , indicato nella formula (3) del && precedente, basta rappresentare i due fattori come dei polinomi in Y , nella forma seguente:

$$(1)\qquad \begin{cases} 9875462 = 9\,Y^2 + 875\,Y + 462 \\ \\ 3221458 = 3\,Y^2 + 221\,Y + 458 \end{cases}$$

Basterà ora eseguire il prodotto dei due polinomi, aiutandosi con la macchina per calcolare di volta in volta i prodotti dei coefficienti aventi tre cifre o meno. Ovviamente, a seconda delle caratteristiche delle varie macchinette di cui si può disporre, l'operazione può essere facilitata, evitando di impostare ogni volta entrambi i fattori dei 9 prodotti che si debbono calcolare.

L'operazione potrebbe essere eseguita per esempio nel modo mostrato dalla tabella seguente:

Y^4	Y^3	Y^2	Y	Y^0
27				
1	989			
2	625			
	193	375		
	4	122		
	1	386		
		102	102	
		400	750	
			211	596
31	813	386	063	596

Come si vede, la determinazione del numero A , senza alcuna perdita di informazione, è stata ricondotta al calcolo di cinque facili somme.

Un secondo tipo di esercizi in cui appare utile saper migliorare le informazioni che ci sono date dalle macchinette è fornito dalla operazione di divisione.

Abbiamo detto che, quando si opera con la divisione di un numero (che per semplicità supporremo intero) per un altro, la macchinetta fornisce il risultato sotto forma di numero decimale, cioè di numero rappresentato da una eventuale parte intera e da una eventuale seconda parte costituita da cifre dopo la virgola.

Per esempio, quando si voglia rappresentare in forma decimale il numero razionale

(2) $$789456/123 = F$$

la macchinetta, eseguendo la operazione di divisione, dà come risultato:

$$6418.3415 \ .$$

Come vedremo, questo risultato della operazione è arrotondato; in altre parole presenta un certo errore, ma di questo non si conosce il segno. Di questa circostanza e delle questioni che ad essa si collegano ci occuperemo in seguito; qui ci limitiamo ad osservare che può essere necessario ricercare altre informazioni, e precisamente:

(a) conoscere il resto della divisione (2), cioè conoscere il numero R tale che sia

(3) $$789456 = 123 \times 6418 + R \ .$$

(b) conoscere altre cifre dopo la virgola, cioè diminuire l'errore con il quale la macchinetta fornisce la rappresentazione decimale del numero F .

Vedremo subito che i due problemi (a) e (b) sono collegati tra loro, e che la risposta al primo permette di costruire delle procedure per la risposta al secondo.

Ora la risposta al problema (a), nel caso in esame, è fornita dalla stessa equazione (3) , che definisce il resto della divisione (2). Si ha quindi immediatamente:

(4) $$R = 42 \;;$$

dalla stessa (3) e dalla (2) si ottiene quindi:

(5) $$F = 6418 + R/123 .$$

Il problema (b) è ora ricondotto ad eseguire la divisione che porta ad esprimere in forma decimale il razionale 42/123 . Nel caso in esame, la capacità della nostra macchinetta permette di giungere al risultato:

(6) $$Y^{2}\,42 = 123 \times 341463 + R_{1}$$

e si ottiene presto dalla (6):

$$R_{1} = 51 \;;$$

ancora nel caso particolare, con la nostra macchinetta, si ottiene facilmente:

(7) $$Y^{2}\,51 = 123 \times 414634 + R_{2} \;;$$

e di qui si ottiene:

$$R_{2} = 18 .$$

E' chiaro che il procedimento può essere proseguito, e si otterrebbe così:

(8) $$F = 6418 + 341463\ Y^{-2} + 414634\ Y^{-4} + 146341\ Y^{-6} + \dots$$

ovvero, scrivendo in forma più abituale

(9) $$F = 6418.(34146)$$

dove abbiamo messo tra parentesi le cifre che costituiscono il periodo del numero decimale che rappresenta F sotto questa forma.

Una procedura analoga può essere seguita quando si vogliano migliorare le informazioni date dalla macchinetta nel caso del numero B, definito dalla (5) del &&3, e precisamente quando si voglia migliorare l'informazione

(10) $$B = 1/9875462 = X^{-7} \times 1.0126\dots$$

Per comodità, indichiamo con D il divisore e rappresentiamolo nella forma seguente:

$$(11) \qquad D = 9 Y^2 + 875 Y + 462 .$$

Si ha:

$$(12) \qquad Y^3 = 101 \times D + S$$

essendo

$$(13) \qquad S = 2 \times Y^2 + 578 Y + 338 .$$

In modo analogo si ha:

$$(14) \qquad Y S = 261 \times D + S_1$$

essendo:

$$(15) \qquad S_1 = 843 Y + 418 .$$

Ed ancora:

$$(16) \qquad S_1 = 85 \times D + S_2$$

essendo

$$(17) \qquad S_2 = 4 Y^2 + 4 Y + 730$$

Ora dalle (12) . (14) , (16) si ottiene

$$(18) \qquad B = X^7 \times 1.01261085...$$

La operazione può essere ovviamente proseguita qualora si volessero ulteriori informazioni.

5.- Abbiamo visto nei && precedenti come si possano utilizzare i piccoli calcolatori tascabili per determinare il quoto ed il resto della divisione di due interi naturali. E' appena necessario osservare che la possibilità di determinare il resto senza dover fare molti calcoli penosi e tediosi può essere utilizzata anche per applicare metodicamente l'algoritmo euclideo delle divisioni successive per la ricerca del massimo comun divisore di due interi naturali; invero, in possesso di questi mezzi di calcolo, l'algoritmo delle divisioni successive risulta spesso molto più spedito di quello che fa ricorso alla scomposizione in fattori primi dei due numeri.

Molti altri esercizi si possono escogitare in questo ordine di idee; tra gli altri, vorremmo ricordare che con mezzi anche poco potenti come le macchinette di cui parliamo è possibile rendere poco tediosi e penosi i calcoli che si riferiscono alle verifiche delle proprietà della congruenza, ed applicare questa nozione a vari problemi di aritmetica.

Ricordiamo qui che, fissato un numero naturale **m**, due interi A e B si dicono **congruenti rispetto al modulo m** e si scrive

$$A \equiv B \pmod{m} \tag{1}$$

se la differenza **A-B** è multipla di m.

Si dimostra che la relazione **(1)** è una **"relazione di equivalenza"** cioè possiede le proprietà classiche: riflessiva, simmetrica e transitiva. Inoltre dalla validità della **(1)** e della

$$A' \equiv B' \pmod{m} \tag{2}$$

si trae la validità delle relazioni

$$\left.\begin{aligned} A + A' &\equiv B + B' \\ A - A' &\equiv B - B' \\ AA' &\equiv BB' \quad . \end{aligned}\right\} \pmod{m} \tag{3}$$

Crediamo che basti il richiamo di queste poche proprietà fondamentali della relazione di congruenza per dare all'insegnante accorto molti spunti di impiego delle macchinette nei calcoli.

Tra gli spunti a cui accennavamo vi sono quelli riguardanti per esempio la ricerca dei criteri di divisibilità di un numero per un numero primo determinato, e quello del numero delle cifre del periodo della rappresentazione decimale di un numero razionale.

Per quanto riguarda il primo problema, sviluppiamo qui di seguito l'esempio relativo al 7.

Si ha invero dalle (3) :

$$
(4) \qquad \begin{cases}
X \equiv 3 & \text{(mod.7)} \\
X^2 \equiv 9 \equiv 2 & " \\
X^3 \equiv 6 & " \\
X^4 \equiv 4 & " \\
X^5 \equiv 5 & " \\
X^6 \equiv 1 & "
\end{cases}
$$

La validità dell'ultima di queste formule potrebbe essere accertata come caso particolare di un classico teorema di P.FERMAT. Ma a noi esse interessano qui come punto di partenza per enunciare il criterio di divisibilità di un intero per 7 : non daremo la trattazione generale, ma analizzeremo un esempio, da cui l'insegnante potrà trarre lo spunto per la dimostrazione generale.

Sia dunque il numero C, rappresentato in forma decimale (Cfr.&&3) con un allineamento di 6 cifre nel modo seguente:

$$C = aX^5 + bX^4 + dX^3 + eX^2 + fX + g .$$

Dalle (3) e dalla tabella (4) si ha la congruenza seguente:

$$(5) \qquad C \equiv 5a + 4b + 6c + 2e + 3f + g \pmod{7} ;$$

il significato di questa congruenza potrebbe essere espresso in parole dicendo che i due membri, divisi per 7 , dànno il medesimo resto; ovviamente se tale resto è zero il numero C risulta in particolare multiplo di 7 . Ora è chiaro che il numero a destra della congruenza (5) è molto più piccolo di quello che sta a sinistra; pertanto è possibile verificare direttamente il fatto che esso sia multiplo di 7 , oppure applicare a questo numero il criterio che è stato applicato al numero C, e così proseguire fino a che la verifica se il numero considerato sia oppure no multiplo di 7 diventa immediata.

Per esempio, nel caso C = 365 (numero dei giorni dell'anno non bisestile) si ha, come caso particolare, dalla tabella (4), con ragionamenti analoghi ai precedenti:

$$365 \equiv 2x3 + 3x6 + 5 = 29 \equiv 1 \ (\text{mod.}7) \ ;$$

e di qui si trae la nota regola riguardante il calendario, secondo la quale ogni anno comincia con il giorno della settimana successivo a quello con cui è cominciato l'anno che lo precede, se questo non è bisestile.

Questi esempi riguardanti la divisibilità potrebbero anche essere considerati troppo complicati da uno scolaro scaltro; questi invero potrebbe osservare che il fatto che un numero intero sia oppure no multiplo di un determinato altro (quindi in particolare di un dato numero primo) può essere verificato direttamente con la macchinetta eseguendo la divisione ed osservando se sul visore compare un numero intero oppure un numero con delle cifre decimali dopo la virgola: infatti il primo caso garantirebbe la divisibilità del primo numero per il secondo.

Invece la utilità della utilizzazione del concetto di congruenza e delle sue proprietà appare forse meglio quando si tratti di affrontare il problema della determinazione del numero di cifre costituenti il periodo della rappresentazione decimale di un dato numero razionale.

A tal fine ricordiamo qui brevemente alcune nozioni di aritmetica pratica che non sempre sono presenti a tutti gli scolari.

Indicato con **A** un numero intero, rappresentato nella forma usuale con un allineamento di **r** cifre, si sa che il numero decimale periodico

(6) $\qquad 0.(A)$ (periodo)

ha la frazione generatrice:

(7) $\qquad A/(X^r - 1)$.

La stessa cosa potrebbe essere espressa in altro modo, dicendo che il numero decimale periodico (6) è la rappresentazione decimale del razionale (7). Così, per esempio,

(8) $$79/99$$

è rappresentato in forma decimale dal numero periodico:

(9) $$0.(79) \ .$$

Questa regola è insegnata dai libri di aritmetica pratica senza spiegazione; invero questa implicherebbe la somma della serie geometrica

$$A\left[X^{-r} + X^{-2r} + X^{-3r} + \ldots\right] = A\ X^{-r}/(1 - X^{-r})$$

che non fa parte dei programmi attuali di matematica elementare.

Si consideri ora in particolare un numero primo che indicheremo secondo il solito con p, e che supporremo rappresentato in forma decimale con un allineamento di $n+1$ cifre. Si avrà quindi:

(10) $$X^{n} < p < X^{n+1}$$

ossia

(11) $$X^{-1} < X^{n}/p < 1 \ .$$

Il significato della (11) potrebbe essere espresso con parole dicendo che il razionale X^{n}/p può essere rappresentato in forma decimale periodica del tipo (6); indicando con r il numero delle cifre del periodo si avrebbe quindi, ricordando gli sviluppi che hanno condotto alle (6) e (7):

(12) $$X^{n}/p = A/(X^{r} - 1)$$

ossia:

(13) $$X^{n}(X^{r} - 1) \equiv 0 \quad (\text{mod.}p) \ .$$

Escludiamo ora che si abbia $p = 2$ oppure $p = 5$, il che darebbe luogo ad un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola, cioè non periodico. Dalla (13) si trae:

(14) $$X^r \equiv 1 \pmod{p} \quad .$$

Per un classico teorema di FERMAT già citato, la (14) ha certamente la soluzione

(15) $$r = p - 1 \; ;$$

ma può avere anche come soluzione un intero che sia divisore di $(p - 1)$; per esempio, per $p = 13$ si ha

$$X^6 = 13 \times 76923 + 1 \; .$$

Il minimo intero r , divisore di $(p - 1)$, che è soluzione della (14) viene chiamato gaussiano di p nella base 10. Per quanto precede, tale numero dà anche il numero delle cifre del periodo della rappresentazione decimale del razionale $1/p$.

La ricerca di tale numero, nei casi concreti, è facilitata dall'impiego di una macchinetta, e può costituire un utile spunto di utilizzazione di questa.

Si consideri per esempio il caso in cui sia $p = 47$. Allora il **gaussiano** di 47 nella base 10 può essere soltanto un divisore di 46; ora, avendosi

$$46 = 2 \times 23$$

si possono avere soltanto tre casi, per il numero delle cifre del periodo di 1/47: o questo numero è 2, oppure è 23, oppure è 46. Questa ultima ipotesi è la vera, e per dimostrarlo basterà ovviamente dimostrare che le due prime non sono valide, cioè che non si può avere:

(16) $$X^{2} \equiv 1 \qquad (\text{mod.}47)$$

oppure

(17) $$X^{23} \equiv 1 \qquad (\text{mod.}47)\ .$$

La verifica del fatto che queste due congruenze non sussistono si può fare con un calcolo di pochi minuti, utilizzando le procedure per la ricerca del resto di cui abbiamo detto, e ricordando le (2) e (3).

Riportiamo qui i risultati, che sono contenuti nella seguente tabella:

(18) $$\left\{\begin{array}{lll} X^{2} & \equiv 6 & (\text{mod.}47) \\ X^{3} & \equiv 13 & \text{"} \\ X^{4} & \equiv 36 & \text{"} \\ X^{5} & \equiv 31 & \text{"} \\ X^{10} & \equiv 21 & \text{"} \\ X^{20} & \equiv 18 & \text{"} \\ X^{23} & \equiv 46 = -1 & \text{"} \end{array}\right.$$

Quindi le ipotesi (16) e (17) non sono valide, e si ha, dalla ultima delle (18) :

(19) $$X^{46} \equiv 1 \quad (\text{mod.}47)\ .$$